Planche n° 17. Rationnels, réels

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (I)

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

1) (**) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n-ième parfaite.

2) (**) $\log 2$.

3) (***) e (Hermite a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).

Pour cela, établir que pour tout entier naturel n, $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel non nul n, $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

4) (***) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle ou on admet le théorème de Gauss : soient a, b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).

5) (***) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Pour le nombre π, il faudra attendre d'avoir quelques résultats supplémentaires sur les suites et les polynômes ...

Exercice n° 2 (IT)**

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A + B)$, $\inf A$, $\inf B$, $\inf\,(A + B)$ existent et que l'on a $\sup\,(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\inf\,(A + B) = \inf A + \inf B$. ($A + B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

Exercice n° 3 (**)

Soit $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Exercice n° 4 (IT)**

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x - y|,\ (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Exercice n° 5 (*IT)**

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A \cap B)$, $\sup(A \cup B)$, $\sup(A + B)$ et $\sup(AB)$? ($A + B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Exercice n° 6 (**)

(Identité de Catalan) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice n° 7 (I)** (Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI)

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n des nombres réels.

1) En considérant la fonction $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2$, montrer que $|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

2) En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

(l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

Exercice n° 8 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1$.

Exercice n° 9 (**)

Montrer que $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

